Расширенный отчет по результатам реализации проекта № 22-21-00387 «Решение задач параметрической идентификации дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами: новые методы и алгоритмы на основе блочно-матричных ортогональных преобразований»

Содержание

Введение, цель и задачи исследования **2**

1 Первый этап реализации проекта **3**

1.1 План работ и результаты, полученные в ходе реализации первого этапа проекта 3

1.2 Методы и подходы, использованные при реализации первого этапа проекта . . 4

1.2.1 Новые алгоритмы информационной фильтрации 4

1.2.2 Новые блочно-ортогонализованные квадратно-корневые алгоритмы дискретной фильтрации 7

1.2.3 Новые блочно-ортогонализованные алгоритмы дискретной фильтрации на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта 8

1.2.4 Программная реализация алгоритмов 12

1.2.5 Численный пример 12

2 Второй этап реализации проекта **13**

2.1 План работ и результаты, полученные в ходе реализации второго этапа проекта 13

2.2 Методы и подходы, использованные при реализации второго этапа проекта . . 15

2.2.1 Задача параметрической идентификации 15

2.2.2 Новые алгоритмы параметрической идентификации на основе блочно-матричных ортогональных преобразований 16

2.2.3 Новые алгоритмы параметрической идентификации на основе уравнений чувствительности оценок вектора состояния 18

2.2.4 Программная реализация алгоритмов 20

2.2.5 Численный пример 21

Заключение, результаты выполнения проекта **22**

A Сертификаты конференций **26**

Введение, цель и задачи исследования

Дискретными линейными стохастическими системами с аддитивными и мультипликативными шумами описывается широкий класс математических моделей сложных систем во многих областях науки и техники, таких как: сложные производственно-технологические, энергетические, технические и экономические системы, системы обработки изображений, телекоммуникационные системы, аэрокосмические системы и др. В процессе функционирования системы структура математической модели может оставаться неизменной, однако параметры модели могут изменяться. Как следствие, возникает необходимость в решении задачи параметрической идентификации, которая на практике обычно решается численными методами.

При программной реализации алгоритмов идентификации, основанных на алгоритмах дискретной фильтрации, серьезной проблемой является влияние ошибок машинного округления на результат вычислений. Поэтому построение численно устойчивых методов фильтрации и идентификации — крайне важная и актуальная задача. Одно из эффективных решений данной проблемы заключается в применении численно устойчивых матричных ортогональных преобразований. В настоящее время разработан широкий класс численно устойчивых блочно-ортогонализованных алгоритмов (array algorithms в англоязычной литературе) как оптимальной дискретной фильтрации, так и адаптивной фильтрации и параметрической идентификации. Но указанные методы построены только для класса дискретных линейных стохастических систем с аддитивными гауссовскими шумами. Для систем с аддитивными и мультипликативными шумами такие методы пока не построены.

Целью проекта является разработка новых методов и алгоритмов параметрической идентификации дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами на основе блочно-матричных ортогональных преобразований.

Научная новизна проекта заключается в том, что в нем впервые поставлена и будет решена задача построения новых, численно устойчивых к ошибкам машинного округления, методов параметрической идентификации в классе дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами.

Главным **результатом** выполнения проекта является создание целостного исследовательского инструментария в виде математических методов, алгоритмов и программных средств решения задач параметрической идентификации дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами. Ожидаемые результаты внесут существенный вклад в развитие теории численно устойчивых методов адаптивной фильтрации и параметрической идентификации. Построенные блочно-ортогонализованные алгоритмы позволят получать более качественные решения задач параметрической идентификации математических моделей, представленных дискретными линейными стохастическими системами с аддитивными и мультипликативными шумами.

В рамках проекта было запланировано решение следующего комплекса **задач**:

1. Разработка и теоретическое обоснование новых алгоритмов информационной фильтрации для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.
2. Разработка и теоретическое обоснование новых блочно-ортогонализованных квадратно-корневых алгоритмов дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме) на базе матричного QR-преобразования для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.
3. Разработка и теоретическое обоснование новых блочно-ортогонализованных алгоритмов дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме) на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта (MWGS-преобразования) для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.

4. Построение новых адаптивных фильтров на базе разработанных блочно-ортогонализованных алгоритмов с возможностью вычисления величин чувствительности по параметрам неопределенности дискретной стохастической системы с мультипликативными и аддитивными шумами.
5. Разработка новых алгоритмов параметрической идентификации дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами на основе блочно-матричных ортогональных преобразований.
6. Разработка библиотеки функций с реализацией всех алгоритмов на языке MATLAB. Решение данных задач позволит создать целостный исследовательский инструментарий в виде математических методов, алгоритмов и программных средств решения задач параметрической идентификации дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами.

1 Первый этап реализации проекта

1.1 План работ и результаты, полученные в ходе реализации первого этапа проекта

На первый год реализации проекта были запланированы следующие работы:

1. Разработка и теоретическое обоснование новых алгоритмов информационной фильтрации для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.
2. Разработка и теоретическое обоснование новых блочно-ортогонализованных квадратно-корневых алгоритмов дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме) на базе матричного QR-преобразования для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.
3. Разработка и теоретическое обоснование новых блочно-ортогонализованных алгоритмов дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме) на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта (MWGS-преобразование) для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и и аддитивными шумами.
4. Программная реализация алгоритмов на языке MATLAB.
5. Подготовка публикаций за отчетный период.
6. Апробация результатов на научных мероприятиях.

В результате реализации первого этапа проекта были получены следующие основные результаты:

1. Разработаны и теоретически обоснованы новые алгоритмы информационной фильтрации для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.
2. Разработаны и теоретически обоснованы новые блочно-ортогонализованные квадратно-корневые алгоритмы дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме) на базе матричного QR-преобразования для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.
3. Разработаны и теоретически обоснованы новые блочно-ортогонализованные алгоритмы дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме) на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта (MWGS-преобразование) для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и и аддитивными шумами.

4. Выполнена программная реализация разработанных алгоритмов на языке MATLAB.

Полученные результаты были апробированы на VIII Международной конференции и молодежной школе «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2022), 23–27 мая 2022 г., Самара, Россия (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Институт систем обработки изображений РАН — филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН). Доклад «New discrete-time filtering algorithms based on the MWGS-orthogonalization for systems with multiplicative and additive noises» был представлен аспирантом Кувшновой А. Н. в виде устного выступления в секции «Науки о данных» («Data Science») и получил награду организаторов (приложение **??**). Ссылка на программу конференции: http://itnt-conf.org/images/docs/arch_prog_2022.pdf.

Подготовлены к печати и опубликованы следующие статьи:

1. Tsyganov, A. V. Extended square-root covariance filtering algorithm for discrete-time systems with multiplicative and additive noises / A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, T. N. Kureneva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 6. — P. 1438–1445. — DOI: 10.1134/S199508022209027X (ВАК, WoS Q2, Scopus Q2, RSCI, РИНЦ)
2. Новые алгоритмы дискретной фильтрации на основе MWGS-ортогонализации для систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. Н. Кувшинова, Т. Н. Куренева // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2022): сборник трудов по материалам VIII Международной конференции и молодежной школы (г. Самара, 23–27 мая). — Т. 5. Науки о данных. — Самара : Издательство Самарского университета, 2022. — С. 051332. (РИНЦ)
3. Алгоритмы дискретной фильтрации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. Н. Кувшинова, А. В. Голубков // Вычислительные технологии. — 2023. — Т. 28, № 5. — С. 70–86. — DOI: 10.25743/ICT.2023.28.5.007 (ВАК, Scopus Q3, RSCI, РИНЦ)

1.2 Методы и подходы, использованные при реализации первого этапа проекта

1.2.1 Новые алгоритмы информационной фильтрации

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему с мультипликативными и аддитивными шумами:

$$\begin{cases} x_k = (F_{k-1} + \tilde{F}_{k-1}\xi_{k-1})x_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}, & (1) \\ z_k = (H_k + \tilde{H}_k\zeta_k)x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \ldots, M, & (2) \end{cases}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений, $F_k, \tilde{F}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H_k, \tilde{H}_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, \Pi_0)$ — начальное состояние, $w_k \in \mathbb{R}^q \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ — аддитивный шум в объекте, $v_k \in \mathbb{R}^m \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ — аддитивный шум в измерителе, $\xi_k \in \mathbb{R} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$ — мультипликативный шум в объекте, $\zeta_k \in \mathbb{R} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\zeta^2)$ — мультипликативный шум в измерителе, $Q_k, R_k > 0$.

Перепишем систему (1), (2) в эквивалентной форме

$$\begin{cases} x_k = F_{k-1}x_{k-1} + \tilde{w}_{k-1}, & (3) \\ z_k = H_k x_k + \tilde{v}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, M, & (4) \end{cases}$$

где $\tilde{w}_{k-1} = \tilde{F}_{k-1}\xi_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}w_{k-1}$, $\tilde{v}_k = \tilde{H}_k\zeta_k x_k + v_k$, $\mathbf{E}\left\{x_k x_k^T\right\} = X_k$, $\mathbf{E}\left\{\tilde{w}_k\right\} = 0$, $\mathbf{E}\left\{\tilde{w}_k \tilde{w}_k^T\right\} =$

$\tilde{Q}_k$, $\mathbf{E}\{\tilde{v}_k\} = 0$, $\mathbf{E}\left\{\tilde{v}_k \tilde{v}_k^T\right\} = \tilde{R}_k$,

$$\begin{aligned} X_k &= F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \\ \tilde{Q}_k &= \sigma_\xi^2 \tilde{F}_k X_k \tilde{F}_k^T + G_k Q_k G_k^T, \\ \tilde{R}_k &= \sigma_\zeta^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k. \end{aligned}$$

Ковариационный фильтр (CF) для линейных дискретных стохастических систем вида (3), (4) который в каждый дискретный момент времени k, позволяет вычислить оценку вектора состояния $\hat{x}_{k|k-1}$ и ковариационную матрицу ошибки оценивания P_k, может быть описан алгоритмом, который по своей структуре очень похож на хорошо известный дискретный фильтр Калмана, за исключением того, что в него дополнительно включены выражения для обновления матриц $\tilde{Q}_k$, X_k и $\tilde{R}_k$ (см. [1]).

Алгоритм (CF). Ковариационный фильтр.
Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T$. Положить $P_0 = \Pi_0$, $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$.
for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**
I. Обновление по времени.

$$\tilde{Q}_{k-1} = \sigma_\xi^2 \tilde{F}_{k-1} X_{k-1} \tilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T, \tag{5}$$
$$X_k = F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \tag{6}$$
$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \tag{7}$$
$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{x}_{k-1}. \tag{8}$$

II. Обновление по измерениям.

$$\tilde{R}_k = \sigma_\zeta^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k, \tag{9}$$
$$B_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + \tilde{R}_k, \tag{10}$$
$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T B_k^{-1}, \tag{11}$$
$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}, \tag{12}$$
$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}). \tag{13}$$

В информационной форме фильтра Калмана на каждой итерации алгоритма вместо ковариационной матрицы ошибок оценивания P_k и оценки вектора состояния $\hat{x}_k$ используются информационная матрица $Y_k = P_k^{-1}$ и информационный вектор $y_k = Y_k \hat{x}_k$, аналогично определяются $Y_{k|k-1}$ и $y_{k|k-1}$.

Для получения информационной формы фильтра Калмана из ковариационной формы воспользуемся следующей леммой (см., например, [2]).

Лемма 1 (лемма об обращении матриц) *Пусть матрицы A и C обратимы, тогда*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (C^{-1} + D A^{-1} B)^{-1} D A^{-1}, \tag{14}$$
$$(A + BCD)^{-1} BC = A^{-1} B (C^{-1} + D A^{-1} B)^{-1}. \tag{15}$$

Применяя лемму об обращении матриц к этапам экстраполяции и фильтрации ковариационного фильтра, можно получить различные варианты алгоритмов информационной фильтрации, различающиеся организацией вычислений на этапе обновления по времени:

Алгоритм (IF_1). Информационный фильтр (версия 1).

Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^T$. Положить $Y_0 = \Pi_0^{-1}$, $\hat{y}_0 = Y_0\bar{x}_0$.
for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**
I. Обновление по времени.

$$\tilde{Q}_{k-1} = \sigma_\xi^2 \tilde{F}_{k-1} X_{k-1} \tilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T, \tag{16}$$
$$X_k = F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \tag{17}$$
$$S_{k-1} = F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1}, \tag{18}$$
$$C_{k-1} = S_{k-1} + \tilde{Q}_{k-1}^{-1}, \tag{19}$$
$$J_{k-1} = S_{k-1} C_{k-1}^{-1}, \tag{20}$$
$$Y_{k|k-1} = (I - J_{k-1}) S_{k-1}, \tag{21}$$
$$\hat{y}_{k|k-1} = (I - J_{k-1}) F_{k-1}^{-T} \hat{y}_{k-1}. \tag{22}$$

II. Обновление по измерениям.

$$\tilde{R}_k = \sigma_\zeta^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k, \tag{23}$$
$$Y_k = Y_{k|k-1} + H_k^T \tilde{R}_k^{-1} H_k, \tag{24}$$
$$\hat{y}_k = \hat{y}_{k|k-1} + H_k^T \tilde{R}_k^{-1} z_k. \tag{25}$$

Алгоритм (IF_2). Информационный фильтр (версия 2).
Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^T$. Положить $Y_0 = \Pi_0^{-1}$, $y_0 = Y_0\bar{x}_0$.
for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**
I. Обновление по времени.

$$\tilde{Q}_{k-1} = \sigma_\xi^2 \tilde{F}_{k-1} X_{k-1} \tilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T,$$
$$X_k = F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1},$$
$$Y_{k|k-1} = (F_{k-1} Y_{k-1}^{-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1})^{-1},$$
$$y_{k|k-1} = Y_{k|k-1} F_{k-1} Y_{k-1}^{-1} y_{k-1}.$$

II. Обновление по измерениям.

$$\tilde{R}_k = \sigma_\zeta^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k,$$
$$Y_k = Y_{k|k-1} + H_k^T \tilde{R}_k^{-1} H_k,$$
$$y_k = y_{k|k-1} + H_k^T \tilde{R}_k^{-1} z_k.$$

Алгоритм (IF_3). Информационный фильтр (версия 3).
Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^T$. Положить $Y_0 = \Pi_0^{-1}$, $\hat{y}_0 = Y_0\bar{x}_0$.
for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**
I. Обновление по времени.

$$\tilde{Q}_{k-1} = \sigma_\xi^2 \tilde{F}_{k-1} X_{k-1} \tilde{F}_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T, \tag{26}$$
$$X_k = F_{k-1} X_{k-1} F_{k-1}^T + \tilde{Q}_{k-1}, \tag{27}$$
$$A_{k-1} = F_{k-1}^{-T} Y_{k-1} F_{k-1}^{-1}, \tag{28}$$
$$L_{k-1} = A_{k-1}(I + \tilde{Q}_{k-1} A_{k-1})^{-1}, \tag{29}$$
$$Y_{k|k-1} = (I - L_{k-1}\tilde{Q}_{k-1}) A_{k-1}, \tag{30}$$
$$\hat{y}_{k|k-1} = (I - L_{k-1}\tilde{Q}_{k-1}) F_{k-1}^{-T} \hat{y}_{k-1}. \tag{31}$$

II. Обновление по измерениям.

$$\tilde{R}_k = \sigma_\zeta^2 \tilde{H}_k X_k \tilde{H}_k^T + R_k, \tag{32}$$

$$Y_k = Y_{k|k-1} + H_k^T \tilde{R}_k^{-1} H_k, \tag{33}$$

$$\hat{y}_k = \hat{y}_{k|k-1} + H_k^T \tilde{R}_k^{-1} z_k. \tag{34}$$

Построенные информационные алгоритмы могут быть использованы для получения новых численно устойчивых модификаций алгоритмов дискретной фильтрации и параметрической идентификации.

1.2.2 Новые блочно-ортогонализованные квадратно-корневые алгоритмы дискретной фильтрации

Квадратно-корневые алгоритмы дискретной фильтрации для систем с аддитивными и мультипликативными шумами были получены с использованием свойств ортогональных матриц и блочно-матричных ортогональных преобразований. Для теоретического обоснования и практического подтверждения эквивалентности построенных квадратно-корневых алгоритмов «стандартным» были доказаны соответствующие теоремы и проведены серии вычислительных экспериментов. Разработанные квадратно-корневые алгоритмы дискретной фильтрации имеют расширенную блочную форму и позволяют обновлять все необходимые величины фильтров с использованием единой численно устойчивой QR-ортогонализации а, следовательно, имеют улучшенные вычислительные свойства. В качестве примера рассмотрим расширенный квадратно-корневой ковариационный фильтр, предложенный в [3].

Алгоритм (eSR-CF-TM). Расширенный квадратно-корневой ковариационный фильтр.

Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T$. Найти разложения Холецкого $\Pi_0 = S_{\Pi_0} S_{\Pi_0}^T$, $X_0 = S_{X_0} S_{X_0}^T$. Положить $S_{P_0} = S_{\Pi_0}$, $\hat{z}_0 = S_{P_0}^{-1} \bar{x}_0$.

for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**

I. Обновление по времени. Найти разложение Холецкого $Q_{k-1} = S_{Q_{k-1}} S_{Q_{k-1}}^T$. Вычислить $S_{\widetilde{Q}_{k-1}}$, $S_{P_{k|k-1}}$ и $\hat{z}_{k|k-1}$:

$$\begin{bmatrix} S_{\widetilde{Q}_{k-1}}^T \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{O}_1^{TU} \begin{bmatrix} \sigma_\xi S_{X_{k-1}}^T \widetilde{F}_{k-1}^T \\ S_{Q_{k-1}}^T G_{k-1}^T \end{bmatrix}, \tag{35}$$

$\mathcal{O}_1^{TU} \in \mathbb{R}^{(n+q)\times(n+q)}$ — матрица ортогонального преобразования правой части (35) к верхнетреугольному виду;

$$\begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T & \hat{z}_{k|k-1} \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \mathcal{O}_2^{TU} \begin{bmatrix} S_{P_{k-1}}^T F_{k-1}^T & \hat{z}_{k-1} \\ S_{\widetilde{Q}_{k-1}}^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{36}$$

$\mathcal{O}_2^{TU} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ — матрица ортогонального преобразования правой части (36) к верхнетреугольному виду.

II. Обновление по измерениям. Найти разложение Холецкого $R_k = S_{R_k} S_{R_k}^T$. Вычислить S_{X_k}, S_{P_k} и $\hat{z}_k$:

$$\begin{bmatrix} S_{X_k}^T \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{O}_1^{MU} \begin{bmatrix} S_{X_{k-1}}^T F_{k-1}^T \\ S_{\widetilde{Q}_{k-1}}^T \end{bmatrix}, \tag{37}$$

$\mathcal{O}_1^{MU} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ — матрица ортогонального преобразования правой части (37) к верхнетреугольному виду;

$$\begin{bmatrix} S_{\Sigma_k}^T & \bar{K}_k^T & -\bar{e}_k \\ 0 & S_{P_k}^T & \hat{z}_k \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} = \mathcal{O}_2^{MU} \begin{bmatrix} S_{R_k}^T & 0 & -S_{R_k}^{-1} z_k \\ S_{P_{k|k-1}}^T H_k^T & S_{P_{k|k-1}}^T & \hat{z}_{k|k-1} \\ \sigma_\zeta S_{X_k}^T \widetilde{H}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{38}$$

$\mathcal{O}_2^{MU} \in \mathbb{R}^{(2n+m)\times(2n+m)}$ — матрица ортогонального преобразования правой части (38) к верхнетреугольному виду.

Замечание 1 *В любой момент времени k оценки вектора состояния x_k можно вычислить как $\hat{x}_k = S_{P_k}\hat{z}_k$ и $\hat{x}_{k|k-1} = S_{P_{k|k-1}}\hat{z}_{k|k-1}$.*

Теорема 1 *Алгоритм CF и алгоритм eSR-CF-TM алгебраически эквивалентнты.*

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают эквивалентность построенных квадратно-корневых алгоритмов «стандартным».

1.2.3 Новые блочно-ортогонализованные алгоритмы дискретной фильтрации на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта

Модифицированный метод ортогонализации Грама-Шмидта (MGS) был предложен А. Бьёрком [4]. В отличие от классической ортогонализации Грама-Шмидта, данный метод является более эффективным в вычислительном плане, при этом точность вычислений по методу MGS сравнима с точностью вычислений по методу триангуляризации Хаусхолдера.

Метод модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта (MWGS) впервые был предложен К. Торнтон [5] для вычисления UD-факторов ковариационной матрицы ошибок оценивания на этапе экстраполяции в UD-фильтре Дж. Бирмана [6, Theorem VI.4.1, p. 127]. В алгоритме MWGS использовано свойство ортогональности r-векторов b_i и b_j относительно весовой диагональной матрицы D_w:

$$b_i^T D_w b_j = \begin{cases} \beta_i > 0, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Известны два основных вида разложения прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{r\times s}$ с помощью метода MWGS:

- UD-разложение (обратная процедура MWGS) и
- LD-разложение (прямая процедура MWGS).

Обратная процедура MWGS ортогонализации, впервые предложенная К. Торнтон, приобрела широкую известность в области дискретной фильтрации стохастических систем, применялась и применяется в настоящее время для построения различных модификаций UD-фильтра Калмана.

В недавней работе [7] предложен общий подход к построению алгоритмов дискретной фильтрации на базе MWGS-ортогонализации в классе дискретных линейных стохастических систем с аддитивными шумами, а также проведен подробный анализ вычислительных свойств построенных алгоритмов. Развивая и дополняя полученные ранее результаты, мы решаем задачу построения новых алгоритмов дискретной фильтрации на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта для более широкого класса дискретных линейных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами вида (3), (4). Первый шаг к решению данной задачи сделан в работе [1], где предложены новые UD-алгоритмы ковариационного и информационного типа.

При построении новых алгоритмов дискретной фильтрации были использованы два типа MWGS-ортогонализации: прямая и обратная.

В таблице 1 приведен список построенных MWGS-алгоритмов и их основные характеристики. Все алгоритмы являются блочно-матричными. Характеристика “Тип” (расширенный/обычный) указывает на способ вычисления оценок вектора состояния (в едином блочном массиве или в отдельном матричном выражении). Теоретическое обоснование каждого

Таблица 1: Характеристики MWGS-алгоритмов

Алгоритм	Форма, тип	Разложение	Этапы
(UD/LD)-CF-TM	Ковариационная, обычный	UDU^T/LDL^T	Экстраполяция+фильтрация
(UD/LD)-CF	Ковариационная, обычный	UDU^T/LDL^T	Совмещенный
e(UD/LD)-CF-TM	Ковариационная, расширенный	UDU^T/LDL^T	Экстраполяция+фильтрация
e(UD/LD)-CF	Ковариационная, расширенный	UDU^T/LDL^T	Совмещенный
(UD/LD)-IF-TM	Информационная, обычный	UDU^T/LDL^T	Экстраполяция+фильтрация
(UD/LD)-IF	Информационная, обычный	UDU^T/LDL^T	Совмещенный
e(UD/LD)-IF-TM	Информационная, расширенный	UDU^T/LDL^T	Экстраполяция+фильтрация
e(UD/LD)-IF	Информационная, расширенный	UDU^T/LDL^T	Совмещенный

алгоритма основано на доказательстве его алгебраической эквивалентности стандартным алгоритмам ковариационного и информационного типа.

В качестве примера рассмотрим расширенные LD-фильтры в ковариационной и информационной формах, описанные в [8].

Алгоритм (eLD-CF-TM). Расширенный ковариационный LD-фильтр.

Инициализация. Вычислить $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^T$, $\mathrm{chol}(\Pi_0) = L_{\Pi_0} D_{\Pi_0} L_{\Pi_0}^T$, $\mathrm{chol}(X_0) = L_{X_0} D_{X_0} L_{X_0}^T$. Положить $L_{P_0} = L_{\Pi_0}$, $D_{P_0} = D_{\Pi_0}$, $\hat{s}_0 = (L_{P_0} D_{P_0})^{-1}\bar{x}_0$.

for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**

I. Обновление по времени.

I.1. Вычислить $\mathrm{chol}(Q_{k-1}) = L_{Q_{k-1}} D_{Q_{k-1}} L_{Q_{k-1}}^T$.

I.2. Вычислить LD-факторы $\{L_{\tilde{Q}_{k-1}}, D_{\tilde{Q}_{k-1}}\}$ матрицы $\tilde{Q}_{k-1}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{F}_{k-1}L_{X_{k-1}} & G_{k-1}L_{Q_{k-1}}\end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{TU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix}L_{\tilde{Q}_{k-1}}\end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathfrak{W}_{TU}^T, \tag{39}$$

$$\mathfrak{W}_{TU}^T \underbrace{\begin{bmatrix}\delta_\xi^2 D_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{Q_{k-1}}\end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}} \mathfrak{W}_{TU} = \underbrace{\begin{bmatrix}D_{\tilde{Q}_{k-1}}\end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}}, \tag{40}$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{(n+q)\times n}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов $\mathcal{A}_{TU}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}$ постмассив $\mathcal{L}_{TU}$ в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}$ в форме диагональной блочной матрицы; см. правые части (39), (40).

I.3. Вычислить LD-факторы $\{L_{P_{k|k-1}}, D_{P_{k|k-1}}\}$ матрицы $P_{k|k-1}$ и LD-оценку $\hat{s}_{k|k-1}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}F_{k-1}L_{P_{k-1}} & L_{\tilde{Q}_{k-1}} \\ \hat{s}_{k-1}^T & 0\end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{TU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix}L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ \hat{s}_{k|k-1}^T & 1\end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathfrak{W}_{TU}^T, \tag{41}$$

$$\mathfrak{W}_{TU}^T \underbrace{\begin{bmatrix}D_{P_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\tilde{Q}_{k-1}}\end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}} \mathfrak{W}_{TU} = \underbrace{\begin{bmatrix}D_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & \gamma\end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}}, \tag{42}$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{2n\times(n+1)}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов $\mathcal{A}_{TU}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}$ постмассив $\mathcal{L}_{TU}$ в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}$ в форме диагональной блочной матрицы; см. правые части (41), (42).

I.4. Вычислить LD-факторы $\{L_{X_k}, D_{X_k}\}$ матрицы X_k:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{k-1}L_{X_{k-1}} & L_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{TU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{X_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathfrak{W}_{TU}^T, \tag{43}$$

$$\mathfrak{W}_{TU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\tilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}} \mathfrak{W}_{TU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{X_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}}, \tag{44}$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{2n\times n}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов $\mathcal{A}_{TU}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}$ постмассив $\mathcal{L}_{TU}$ в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}$ в форме диагональной блочной матрицы; см. правые части (43), (44).

II. Обновление по измерениям.

II.1. Вычислить $\mathrm{chol}(R_k) = L_{R_k} D_{R_k} L_{R_k}^T$.

II.2. Вычислить LD-факторы $\{L_{\tilde{R}_k}, D_{\tilde{R}_k}\}$ матрицы $\tilde{R}_k$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{H}_k L_{X_k} & L_{R_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{MU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\tilde{R}_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{MU}} \mathfrak{W}_{MU}^T, \tag{45}$$

$$\mathfrak{W}_{MU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_\zeta^2 D_{X_k} & 0 \\ 0 & D_{R_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}} \mathfrak{W}_{MU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\tilde{R}_k} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}}, \tag{46}$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times m}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов $\mathcal{A}_{MU}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}$ постмассив $\mathcal{L}_{MU}$ в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}$ в форме диагональной блочной матрицы; см. правые части (45), (46).

II.3. Вычислить LD-факторы $\{L_{P_k}, D_{P_k}\}$ матрицы P_k и LD-оценку $\hat{s}_k$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{\tilde{R}_k} & H_k L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & L_{P_{k|k-1}} & 0 \\ -z_k^T (L_{\tilde{R}_k} D_{\tilde{R}_k})^{-T} & \hat{s}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{MU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{B_k} & 0 & 0 \\ K_k L_{B_k} & L_{P_k} & 0 \\ \tau^T & \hat{s}_k^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{MU}} \mathfrak{W}_{MU}^T, \tag{47}$$

$$\mathfrak{W}_{MU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\tilde{R}_k} & 0 & 0 \\ 0 & D_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}} \mathfrak{W}_{MU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{B_k} & 0 & 0 \\ 0 & D_{P_k} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}}, \tag{48}$$

где $\mathfrak{W}_{MU} \in \mathbb{R}^{(m+n+1)\times(m+n+1)}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов $\mathcal{A}_{MU}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}$ постмассив $\mathcal{L}_{MU}$ в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}$ в форме диагональной блочной матрицы; см. правые части (47), (48).

Замечание 2 *В любой момент времени k оценку вектора состояния x_k можно вычислить как $\hat{x}_k = L_{P_k} D_{P_k} \hat{s}_k$.*

Теорема 2 *Алгоритм CF и алгоритм eLD-CF-TM алгебраически эквивалентны.*

Обозначим через $\hat{d}_k = (L_{Y_k} D_{Y_k})^{-1} \hat{y}_k$ LD-оценку информационного фильтра. Расширенный информационный LD-фильтр запишем в следующем виде.

Алгоритм (eLD-IF-TM). Расширенный информационный LD-фильтр.

Инициализация. Вычислить $Y_0 = \Pi_0^{-1}$, $\mathrm{chol}(Y_0) = L_{Y_0} D_{Y_0} L_{Y_0}^T$, $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0 \bar{x}_0^T$, $\mathrm{chol}(X_0) = L_{X_0} D_{X_0} L_{X_0}^T$. Положить $\hat{d}_0 = (L_{Y_0} D_{Y_0})^{-1} \bar{y}_0$, где $\bar{y}_0 = Y_0 \bar{x}_0$.

for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**

I. Обновление по времени.

I.1. Вычислить $\mathrm{chol}(Q_{k-1}) = L_{Q_{k-1}} D_{Q_{k-1}} L_{Q_{k-1}}^T$.

I.2. Вычислить LD-факторы $\{L_{\tilde{Q}_{k-1}}, D_{\tilde{Q}_{k-1}}\}$ матрицы $\tilde{Q}_{k-1}$ по формулам (39), (40).

I.3. Вычислить LD-факторы $\{L_{Y_{k|k-1}}, D_{Y_{k|k-1}}\}$ матрицы $Y_{k|k-1}$ и LD-оценку $\hat{d}_{k|k-1}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_{\tilde{Q}_{k-1}}^{-T} & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & F_{k-1}^{-T} L_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & \hat{d}_{k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{TU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{C_{k-1}} & 0 & 0 \\ J_{k-1} L_{C_{k-1}} & L_{Y_{k|k-1}} & 0 \\ \tau^T & \hat{d}_{k|k-1}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{TU}} \mathfrak{W}_{TU}^T, \tag{49}$$

$$\mathfrak{W}_{TU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\tilde{Q}_{k-1}}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}} \mathfrak{W}_{TU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{C_{k-1}} & 0 & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}}, \tag{50}$$

где $\mathfrak{W}_{TU} \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов $\mathcal{A}_{TU}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{TU}}$ постмассив $\mathcal{L}_{TU}$ в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{TU}}$ в форме диагональной блочной матрицы; см. правые части (49), (50).

I.4. Вычислить LD-факторы $\{L_{X_k}, D_{X_k}\}$ матрицы X_k по формулам (43), (44).

II. Обновление по измерениям.

II.1. Вычислить $\mathrm{chol}(R_k) = L_{R_k} D_{R_k} L_{R_k}^T$.

II.2. Вычислить LD-факторы $\{L_{\tilde{R}_k}, D_{\tilde{R}_k}\}$ матрицы $\tilde{R}_k$ по формулам (45), (46).

II.3. Вычислить $\{L_{Y_k}, D_{Y_k}\}$ и $\hat{d}_k$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_k^T L_{\tilde{R}_k}^{-T} & L_{Y_{k|k-1}} \\ z_k^T L_{\tilde{R}_k}^{-T} & \hat{d}_{k|k-1}^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{MU}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{Y_k} & 0 \\ \hat{d}_k^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}_{MU}} \mathfrak{W}_{MU}^T, \tag{51}$$

$$\mathfrak{W}_{MU}^T \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\tilde{R}_k}^{-1} & 0 \\ 0 & D_{Y_{k|k-1}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}} \mathfrak{W}_{MU} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_{Y_k} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{\mathcal{M}\mathcal{U}}}}, \tag{52}$$

где $\mathfrak{W}_{MU} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(n+1)}$ — матрица MWGS-преобразования, позволяющего получить из предмассивов $\mathcal{A}_{MU}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{MU}}$ постмассив $\mathcal{L}_{MU}$ в форме нижнетреугольной блочной матрицы с единицами на главной диагонали и постмассив $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{MU}}$ в форме диагональной блочной матрицы; см. правые части (51), (52).

Замечание 3 *В любой момент времени k оценку вектора состояния x_k можно вычислить с помощью прямой подстановки как решение системы $L_{Y_k} \hat{x}_k = \hat{d}_k$.*

Теорема 3 *Алгоритм IF_1 и алгоритм eLD-IF-TM алгебраически эквивалентны.*

В [9] приведены результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие преимущества предложенных алгоритмов в сравнении со стандартными в плане численной устойчивости к ошибкам машинного округления. В следующем разделе приведены результаты численных экспериментов для построенных LD-фильтров.

1.2.4 Программная реализация алгоритмов

Для численной проверки теоретических результатов, полученных в ходе первого этапа работы над проектом, на языке MATLAB была реализована библиотека алгоритмов дискретной фильтрации для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами, в которую вошли следующие алгоритмы:

1. «Стандартные» ковариационный и информационные фильтры.
2. Обычные UD/LD-фильтры в ковариационной и информационной форме.
3. Расширенные UD/LD-фильтры в ковариационной и информационной форме.
4. Расширенные квадратно-корневые фильтры в ковариационной и информационной форме.

1.2.5 Численный пример

Рассмотрим модель почти равномерного прямолинейного движения на плоскости [10] с мультипликативными шумами в уравнении объекта и измерений:

$$\begin{cases} x_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \xi_{k-1} \right) x_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \end{bmatrix} w_{k-1}, & (53) \\ z_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \zeta_k \right) + v_k, \quad k = 1, 2, \ldots, M, & (54) \end{cases}$$

где x_1, x_3 — координаты x и y объекта на плоскости, x_2, x_4 — проекции v_x и v_y скорости объекта на оси Ox и Oy, $T = 0.1$ с — шаг дискретизации, $x_0 = [1, 0, 0, 1]^T$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2} I_2)$, $v_k \sim \mathcal{N}(0, 10^{-1} I_2)$, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\zeta_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 10^{-2}$.

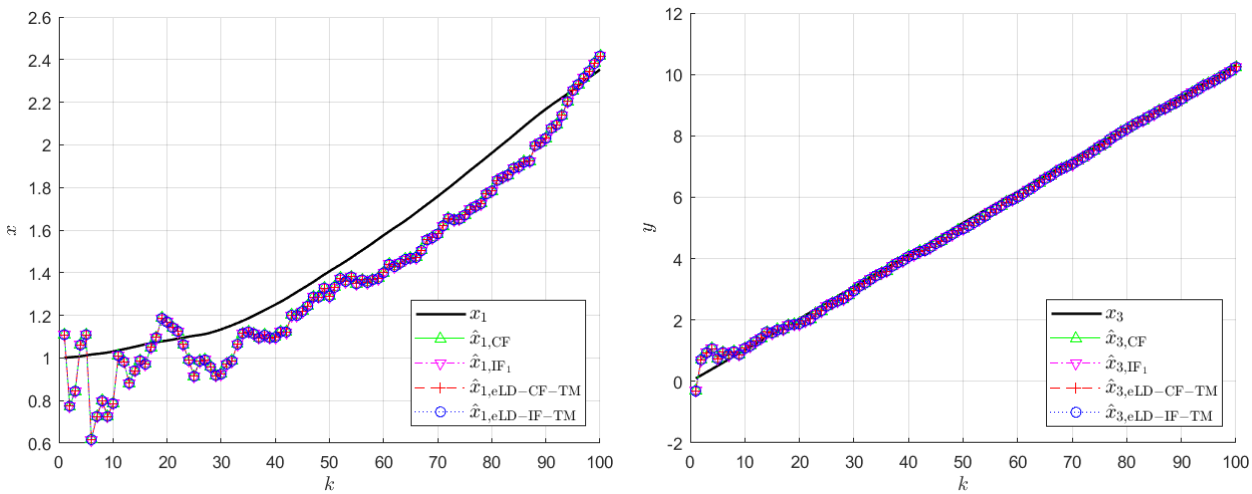


Рис. 1: Оценки координат

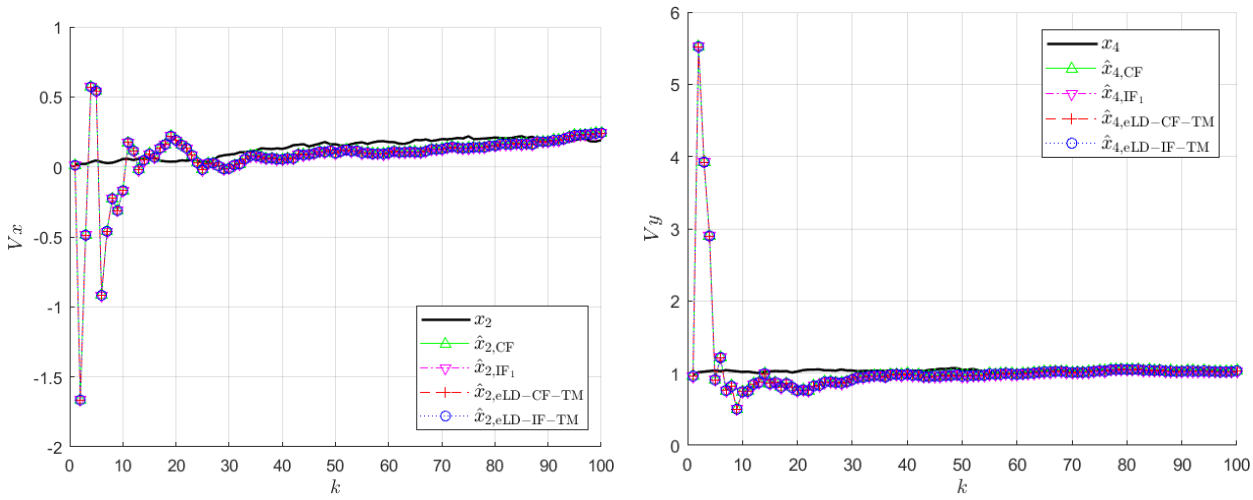


Рис. 2: Оценки скоростей

Таблица 2: Среднее время, с

CF	IF_1	eLD-CF-TM	eLD-IF-TM	eUD-CF-TM	eUD-IF-TM
0.0180	0.0313	0.1529	0.1682	0.1986	0.2196

На рис. 1 и 2 приведены результаты работы расширенных LD-фильтров для $M = 100$, а в табл. 1 — среднее время работы LD-фильтров, а также расширенных UD-фильтров eUD-CF-TM и eUD-IF-TM, по результатам 100 экспериментов для $M = 1000$. Программная реализация алгоритмов выполнена в системе MATLAB, численные эксперименты проводились на программно-аппаратной платформе: ОС — Windows 11, ЦПУ — 11th Gen Intel Core i3-1115G4 @ 3.00GHz, ОЗУ — 8 Гб. Полученные результаты подтверждают эквивалентность построенных алгоритмов стандартным фильтрам, а также показывают более высокую скорость работы расширенных LD-фильтров по сравнению с UD-фильтрами.

2 Второй этап реализации проекта

2.1 План работ и результаты, полученные в ходе реализации второго этапа проекта

На второй год реализации проекта были запланированы следующие работы:

1. Построение новых адаптивных фильтров на базе разработанных блочно-ортогонализованных алгоритмов с возможностью вычисления величин чувствительности по параметрам неопределенности дискретной стохастической системы с мультипликативными и аддитивными шумами.
2. Разработка новых алгоритмов параметрической идентификации дискретных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами на основе блочно-матричных ортогональных преобразований.
3. Разработка библиотеки функций с реализацией всех алгоритмов на языке MATLAB.
4. Подготовка публикаций за отчетный период.
5. Апробация результатов на научных мероприятиях.

В результате реализации второго этапа проекта были получены следующие основные результаты:

1. Разработаны новые алгоритмы параметрической идентификации для систем с адди-

тивными и мультипликативными шумами на основе численных методов оптимизации безградиентного типа, в которых значения критерия идентификации вычисляются с помощью блочно-ортогонализованных алгоритмов дискретной фильтрации.

2. Разработаны новые алгоритмы параметрической идентификации для систем с аддитивными и мультипликативными шумами на основе численных методов оптимизации градиентного типа, в которых значения критерия идентификации и его градиента вычисляются с помощью блочно-ортогонализованных алгоритмов адаптивной дискретной фильтрации с возможностью вычисления величин чувствительности оценок вектора состояния по параметрам неопределенности.
3. Выполнена программная реализация разработанных алгоритмов на языке MATLAB.

Полученные результаты были апробированы на следующих научных мероприятиях:

1. IX Международная конференция и молодежная школа «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2023), 17–23 апреля 2023 г., Самара, Россия (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН).
   Доклад (Голубков А.В., устное выступление): Identification of parameters of the discrete-time stochastic systems models with multiplicative and additive noises.
   Ссылка на программу конференции:
   http://itnt-conf.org/images/docs/2023/Program_ITNT-2023.pdf
2. IX Международная научно-практическая конференция «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии» (CSMSSIT-2023), 24–25 апреля 2023 г., Елец, Россия (Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова, Российский университет транспорта).
   Доклад (Кувшинова А.Н., устное выступление): О вычислении производных в алгоритме параметрической идентификации градиентного типа для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.
   Ссылка на программу конференции:
   https://csmssit2023.elsu.ru/docs/program_of_the_conference_2023.doc

Подготовлены к печати и опубликованы следующие статьи:

1. Цыганов, А. В. Идентификация параметров моделей дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. В. Голубков // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2023): сборник трудов по материалам IX Международной конференции и молодежной школы (г. Самара, 17–23 апреля 2023 г.). — Т. 5. Науки о данных. — Самара : Издательство Самарского университета, 2023. — С. 050682. (РИНЦ)
2. Кувшинова, А. Н. О вычислении производных в алгоритме параметрической идентификации градиентного типа для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. Н. Кувшинова, А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова // Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии: материалы IX Международной научно-практической конференции, Елец, 24–25 апреля 2023 года. — Елец : Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2023. — С. 79–84. (РИНЦ)
3. Tsyganov, A. SVD-based identification of parameters of the discrete-time stochastic systems models with multiplicative and additive noises using metaheuristic optimization / A. Tsyganov, Y. Tsyganova // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 20. —

URL: https://www.mdpi.com/2227-7390/11/20/4292. — DOI: 10.3390/math11204292 (WoS Q1, Scopus Q2)

4. Tsyganov, A. Parameter Identification of the Discrete-Time Stochastic Systems with Multiplicative and Additive Noises Using the UD-based State Sensitivity Evaluation / A. Tsyganov, Y. Tsyganova // Mathematics. — 2023. (WoS Q1, Scopus Q2, принята к печати)

В ходе работ второго этапа зарегистрирована программа для ЭВМ:

1. Цыганов, А.В. Библиотека алгоритмов дискретной фильтрации и параметрической идентификации для дискретных линейных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами v1.0 / А.В. Цыганов, Ю.В. Цыганова, А.В. Голубков // РОСПАТЕНТ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023686525 от 07.12.2023 г.

2.2 Методы и подходы, использованные при реализации второго этапа проекта

2.2.1 Задача параметрической идентификации

Причины появления мультипликативных шумов в рассматриваемых системах могут быть различны, например, это могут быть как ошибки линеаризации и квантования, так и физические явления типа фединга и замирания в каналах связи, а также ошибки моделирования. Мультипликативные шумы обычно используются для моделирования стохастических неопределенностей в динамике системы и измерениях. В данном проекте помимо этого предполагается наличие в рассматриваемых системах *параметрической неопределенности*, то есть, матрицы в уравнениях (1), (2) могут зависеть от неизвестного векторного параметра $\theta \in \mathbb{R}^p$.

Следовательно, все элементы системных матриц F_k, $\widetilde{F}_k$, G_k, H_k, $\widetilde{H}_k$, матриц ковариаций шумов Q_k, R_k и дисперсии σ_ξ^2, σ_ζ^2, а также начальные условия $\bar{x}_0$ и Π_0 могут зависеть от неизвестного параметра θ, то есть, $F_k = F_k(\theta)$, $\widetilde{F}_k = \widetilde{F}_k(\theta)$, $G_k = G_k(\theta)$, и т.д.

Таким образом возникает задача параметрической идентификации системы (1), (2) с целью уточнения параметров модели. Данная задача является актуальной, поскольку общеизвестно, что качество калмановской фильтрации ухудшается при наличии модельных неопределенностей. Решение задачи идентификации позволяет бороться с данной проблемой.

Известные подходы к решению данной задачи включают численную минимизацию по θ критерия идентификации [11], зависящего от неизвестного параметра θ и от доступных измерений $Z_1^M = \{z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_M\}$

$$\hat{\theta}_{min} = \underset{\theta \in \mathcal{D}(\theta)}{\operatorname{argmin}}\, \mathcal{J}(\theta; Z_1^M), \tag{55}$$

где $\mathcal{D}(\theta)$ — некоторое компактное множество, что подразумевает решение оптимизационной задачи с ограничениями.

Для решения данной задачи обычно выбирают критерий идентификации (55) в виде отрицательной логарифмической функции правдоподобия [12]:

$$\mathcal{J}_{\mathrm{CF}}(\theta; Z_1^M) = \frac{Mm}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \left\{ \ln \det \Sigma_k(\theta) + ||\nu_k(\theta)||^2_{\Sigma_k^{-1}(\theta)} \right\}, \tag{56}$$

зависящей как от измерений $Z_1^M = \{z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_M\}$, так и от невязок измерений $\nu_k(\theta) = z_k - H_k \hat{x}_k(\theta)$, вычисляемых стандартным фильтром калмановского типа CF [1, Algorithm 1]. Здесь, $||\nu_k(\theta)||^2_{\Sigma_k^{-1}(\theta)} = \nu_k^T(\theta) \Sigma_k^{-1}(\theta) \nu_k(\theta)$.

В рамках работ второго этапа для рассматриваемых систем были получены новые алгоритмы параметрической идентификации на основе SVD-разложения [15], а также UD-разложения и уравнений чувствительности оценок вектора состояния [16].

2.2.2 Новые алгоритмы параметрической идентификации на основе блочно-матричных ортогональных преобразований

Рассмотрим SVD-факторизацию [17, теорема 1.1.6]: Любую матрицу $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r можно представить в виде

$$A = \mathcal{W}\Sigma\mathcal{V}^*,\ \Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n},\ S = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$$

где $\mathcal{W} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathcal{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — унитарные матрицы, $\mathcal{V}^*$ — означает сопряженную и транспонированную к $\mathcal{V}$, $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ — вещественная неотрицательная диагональная матрица. Величины $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ являются сингулярными значениями матрицы A. Заметим, что если $r = n$ и/или $r = m$, некоторые из нулевых подматриц в Σ отсутствуют.

В работе [15] получена SVD-версия фильтра Калмана (SVD-KF) для систем с аддитивными и мультипликативными шумами и доказана его алгебраическая эквивалентность стандартному фильтру (CF).

Алгоритм (SVD-KF). Ковариационный SVD-фильтр.

Инициализация. Выполнить SVD-разложение матриц $X_0 = \Theta_{X_0} D_{X_0} \Theta_{X_0}^T$ и $\Pi_0 = \Theta_{\Pi_0} D_{\Pi_0} \Theta_{\Pi_0}^T$. Положить $\Theta_{P_0} = \Theta_{\Pi_0}$, $D_{P_0} = D_{\Pi_0}$ и $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$.

for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**

I. Обновление по времени.

I.1. Выполнить SVD-разложение матрицы $Q_{k-1} = \Theta_{Q_{k-1}} D_{Q_{k-1}} \Theta_{Q_{k-1}}^T$.

I.2. Вычислить SVD-факторы $\{\Theta_{\widetilde{Q}_{k-1}}, D_{\widetilde{Q}_{k-1}}\}$, $\{\Theta_{X_k}, D_{X_k}\}$ и $\{\Theta_{P_{k|k-1}}, D_{P_{k|k-1}}\}$, заполнив пред-массивы и выполнив их SVD-разложение:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi D_{X_{k-1}}^{1/2} \Theta_{X_{k-1}}^T \widetilde{F}_{k-1}^T \\ D_{Q_{k-1}}^{1/2} \Theta_{Q_{k-1}}^T G_{k-1}^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{\mathrm{TU}}^{(1)} \begin{bmatrix} D_{\widetilde{Q}_{k-1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{\widetilde{Q}_{k-1}}^T; \tag{57}$$

$$\begin{bmatrix} D_{X_{k-1}}^{1/2} \Theta_{X_{k-1}}^T F_{k-1}^T \\ D_{\widetilde{Q}_{k-1}}^{1/2} \Theta_{\widetilde{Q}_{k-1}}^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{\mathrm{TU}}^{(2)} \begin{bmatrix} D_{X_k}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{X_k}^T; \tag{58}$$

$$\begin{bmatrix} D_{P_{k-1}}^{1/2} \Theta_{P_{k-1}}^T F_{k-1}^T \\ D_{\widetilde{Q}_{k-1}}^{1/2} \Theta_{\widetilde{Q}_{k-1}}^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{\mathrm{TU}}^{(3)} \begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{P_{k|k-1}}^T. \tag{59}$$

I.3. Вычислить $\hat{x}_{k|k-1}$ по $\hat{x}_{k-1}$, используя (8).

II. Обновление по измерениям.

II.1. Выполнить SVD-разложение матрицы $R_k = \Theta_{R_k} D_{R_k} \Theta_{R_k}^T$.

II.2. Вычислить SVD-факторы $\{\Theta_{\widetilde{R}_k}, D_{\widetilde{R}_k}\}$ и $\{\Theta_{\Sigma_k}, D_{\Sigma_k}\}$, заполнив пред-массивы и выполнив их SVD-разложение:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\zeta D_{X_k}^{1/2} \Theta_{X_k}^T \widetilde{H}_k^T \\ D_{R_k}^{1/2} \Theta_{R_k}^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{\mathrm{MU}}^{(1)} \begin{bmatrix} D_{\widetilde{R}_k}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{\widetilde{R}_k}^T; \tag{60}$$

$$\begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}}^{1/2} \Theta_{P_{k|k-1}}^T H_k^T \\ D_{\widetilde{R}_k}^{1/2} \Theta_{\widetilde{R}_k}^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{\mathrm{MU}}^{(2)} \begin{bmatrix} D_{\Sigma_k}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{\Sigma_k}^T. \tag{61}$$

II.3. Вычислить матрицу усиления K_k:

$$K_k = \bar{K}_k D_{\Sigma_k}^{-1} \Theta_{\Sigma_k}^T, \text{ где } \bar{K}_k = P_{k|k-1} H_k^T \Theta_{\Sigma_k}. \tag{62}$$

II.4. Вычислить SVD-факторы $\{\Theta_{P_k}, D_{P_k}\}$, заполнив пред-массив и выполнив его SVD-разложение:

$$\begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}}^{1/2} \Theta_{P_{k|k-1}}^T (I - K_k H_k)^T \\ D_{\tilde{R}_k}^{1/2} \Theta_{\tilde{R}_k}^T K_k^T \end{bmatrix} = \mathcal{W}_{\mathrm{MU}}^{(2)} \begin{bmatrix} D_{P_k}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{P_k}^T. \tag{63}$$

II.5. Найти $\hat{x}_k$:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \bar{K}_k D_{\Sigma_k}^{-1} \bar{\nu}_k, \quad \text{где } \bar{\nu}_k = \Theta_{\Sigma_k}^T (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}). \tag{64}$$

Теперь для построения процедуры параметрической идентификации достаточно переписать выражение для вычисления отрицательной логарифмической функции правдоподобия (56) в терминах SVD-фильтра.

Учитывая, что

$$\det(\Sigma_k) = \det(D_{\Sigma_k}) \quad \text{и} \quad \nu_k^T \Sigma_k^{-1} \nu_k = \bar{\nu}_k^T D_{\Sigma_k}^{-1} \bar{\nu}_k,$$

можно записать

$$\mathcal{J}_{\mathrm{SVD}}(\theta; Z_1^M, U_0^{M-1}) = \frac{Mm}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \{\ln[\det(D_{\Sigma_k})] + \bar{\nu}_k^T D_{\Sigma_k}^{-1} \bar{\nu}_k\} \tag{65}$$

где диагональная матрица D_{Σ_k} и вектор $\bar{\nu}_k$ доступны на каждом шаге алгоритма SVD-KF.

Идентификация неизвестного параметра θ и оценивание вектора состояния x_k системы (1), (2) могут выполняться одновременно согласно критерию

$$\theta^* = \underset{\mathcal{D}(\theta)}{\operatorname{argmin}} \, \mathcal{J}_{\mathrm{SVD}}(\theta; Z_1^M, U_0^{M-1}). \tag{66}$$

Для нахождения оптимального значения θ^* неизвестного параметра θ с целевой функцией (65) в работе [15] применялись безградиентные метаэвристические алгоритма GA (генетический алгоритм) и SA (метод имитации отжига). Численные эксперименты показали преимущества алгоритмов идентификации, основанных на использовании критерия (65) по сравнению с (56) в плане устойчивости к ошибкам машинного округления.

В UD-фильтрах используется разложение матрицы ковариаций ошибок оценивания вида $P = U_P D_P U_P^T$, где U_P — верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, а D_P — диагональная матрица. Для рекуррентного обновления UD-факторов U_P и D_P используется UD-версия модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта (MWGS-UD), в которой по паре пред-массивов $\{\mathcal{A}, \mathcal{D}_{\mathcal{A}}\}$ вычисляется пара пост-массивов $\{\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathcal{U}}\}$:

$$\mathcal{A}^T = \mathcal{U}\mathfrak{M}^T \quad \text{и} \quad \mathcal{A}^T \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \mathcal{A} = \mathcal{U} \mathcal{D}_{\mathcal{U}} \mathcal{U}^T, \tag{67}$$

где $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ $(r > s)$, $\mathfrak{M} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ — MWGS-UD-преобразование, приводящее к верхней треугольной матрице $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Диагональные матрицы $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ удовлетворяют условиям $\mathfrak{M}^T \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \mathfrak{M} = \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} > 0$.

В работе [16] рассмотрена модификация ковариационного UD-фильтра (алгоритм UD-CF-TM), предложенного в [1].

Алгоритм (UD-CF-TM). Ковариационный UD-фильтр.

Вход: $\bar{x}_0$, Π_0.

Инициализация.

1. Положить $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$, $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^T$, $\Pi_0 = U_{\Pi_0} D_{\Pi_0} U_{\Pi_0}^T$, $X_0 = U_{X_0} D_{X_0} U_{X_0}^T$, $U_{P_0} = U_{\Pi_0}$, $D_{P_0} = D_{\Pi_0}$.

for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**

Обновление по времени.

2. $\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{x}_{k-1}$.
3. $Q_{k-1} = U_{Q_{k-1}} D_{Q_{k-1}} U_{Q_{k-1}}^T$.
4. $\mathcal{A}_1^T = \begin{bmatrix} \widetilde{F}_{k-1} U_{X_{k-1}} & G_{k-1} U_{Q_{k-1}} \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 D_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{Q_{k-1}} \end{bmatrix}$.

   Применить MWGS-UD: $\langle \mathcal{A}_1^T, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_1} \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{U}_1, \mathcal{D}_{U_1} \rangle$, где $\mathcal{U}_1 = U_{\widetilde{Q}_{k-1}}$, $\mathcal{D}_{U_1} = D_{\widetilde{Q}_{k-1}}$.
5. $\mathcal{A}_2^T = \begin{bmatrix} F_{k-1} U_{P_{k-1}} & U_{\widetilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_2} = \begin{bmatrix} D_{P_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\widetilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}$.

   Применить MWGS-UD: $\langle \mathcal{A}_2^T, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_2} \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{U}_2, \mathcal{D}_{U_2} \rangle$, где $\mathcal{U}_2 = U_{P_{k|k-1}}$, $\mathcal{D}_{U_2} = D_{P_{k|k-1}}$.
6. $\mathcal{A}_3^T = \begin{bmatrix} F_{k-1} U_{X_{k-1}} & U_{\widetilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_3} = \begin{bmatrix} D_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\widetilde{Q}_{k-1}} \end{bmatrix}$.

   Применить MWGS-UD: $\langle \mathcal{A}_3^T, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_3} \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{U}_3, \mathcal{D}_{U_3} \rangle$, где $\mathcal{U}_3 = U_{X_k}$, $\mathcal{D}_{U_3} = D_{X_k}$.

Обновление по измерениям.

7. $R_k = U_{R_k} D_{R_k} U_{R_k}^T$.
8. $\mathcal{A}_4^T = \begin{bmatrix} \widetilde{H}_k U_{X_k} & U_{R_k} \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_4} = \begin{bmatrix} \sigma_\zeta^2 D_{X_k} & 0 \\ 0 & D_{R_k} \end{bmatrix}$.

   Применить MWGS-UD: $\langle \mathcal{A}_4^T, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_4} \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{U}_4, \mathcal{D}_{U_4} \rangle$, где $\mathcal{U}_4 = U_{\widetilde{R}_k}$, $\mathcal{D}_{U_4} = D_{\widetilde{R}_k}$.
9. $\mathcal{A}_5^T = \begin{bmatrix} U_{P_{k|k-1}} & 0 \\ H_k U_{P_{k|k-1}} & U_{\widetilde{R}_k} \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_5} = \begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\widetilde{R}_k} \end{bmatrix}$.

   Применить MWGS-UD: $\langle \mathcal{A}_5^T, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_5} \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{U}_5, \mathcal{D}_{U_5} \rangle$, где $\mathcal{U}_5 = \begin{bmatrix} U_{P_k} & (K_k U_{\Sigma_k}) \\ 0 & U_{\Sigma_k} \end{bmatrix}$,

   $\mathcal{D}_{U_5} = \begin{bmatrix} D_{P_k} & 0 \\ 0 & D_{\Sigma_k} \end{bmatrix}$.
10. $\bar{e}_k = U_{\Sigma_k}^{-1}(z_k - H_k\hat{x}_{k|k-1})$.
11. $\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + (K_k U_{\Sigma_k})\bar{e}_k$.

Выход: $\hat{x}_k$, $P_k = U_{P_k} D_{P_k} U_{P_k}^T$, $k = 1, 2, \ldots, M$.

Критерий (56) может быть переписан в терминах UD-фильтра. Учитывая, что $\det \Sigma_k(\theta) = \det D_{\Sigma_k(\theta)}$ и $||\nu_k(\theta)||^2_{\Sigma_k^{-1}(\theta)} = ||\bar{e}_k(\theta)||^2_{D^{-1}_{\Sigma_k(\theta)}}$, получаем

$$\mathcal{J}_{UD}(\theta; Z_1^M) = \frac{Mm}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\left\{\ln\det D_{\Sigma_k(\theta)} + ||\bar{e}_k(\theta)||^2_{D^{-1}_{\Sigma_k(\theta)}}\right\}, \tag{68}$$

где диагональная матрица D_{Σ_k} и нормализованный вектор невязок $\bar{e}_k$ вычисляются на шагах 9 и 10 алгоритма UD-CF-TM.

2.2.3 Новые алгоритмы параметрической идентификации на основе уравнений чувствительности оценок вектора состояния

Классический способ решения задачи параметрической идентификации заключается в использовании адаптивных фильтров, в которых параметры модели оцениваются вместе с динамическим состоянием [18]. Это требует определения чувствительности состояния системы к неизвестным параметрам, то есть частных производных оценок состояния. Прямое дифференцирование уравнений фильтра является непосредственным подходом к вычислению

чувствительности состояния. Это приводит к набору *уравнений чувствительности* фильтра. В работе [16] для построения уравнений чувствительности оценок вектора состояния использовался ковариационный UD-фильтр (алгоритм UD-CF-TM).

Для вычисления производных матричного MWGS-преобразования использовались результаты работы [19].

Лемма 2 ([19]) *Пусть элементами пред-массивов $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ в (67) являются известные дифференцируемые функции параметра θ. Производные пост-массивов могут быть вычислены по производным пред-массивов $\mathcal{A}'_\theta$ и $(\mathcal{D}_{\mathcal{U}})'_\theta$ по следующим формулам:*

$$\mathcal{U}'_\theta = \mathcal{U}\left(\bar{\mathcal{L}}_0^T + \bar{\mathcal{U}}_0 + \bar{\mathcal{U}}_2\right)\mathcal{D}_{\mathcal{U}}^{-1} \quad \text{и} \quad (\mathcal{D}_{\mathcal{U}})'_\theta = 2\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_2 \tag{69}$$

где величины $\bar{\mathcal{L}}_0$, $\mathcal{D}_0$, $\bar{\mathcal{U}}_0$ — это, соответственно, строго нижняя треугольная, диагональная и строго верхняя треугольная части матричного произведения $\mathfrak{M}^T\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}'_\theta\mathcal{U}^{-T}$. Кроме того, $\mathcal{D}_2$ и $\bar{\mathcal{U}}_2$ — это, соответственно, диагональная и строго верхняя треугольная части произведения $\mathfrak{M}^T(\mathcal{D}_{\mathcal{A}})'_\theta\mathfrak{M}$.

Одним из основных результатов, полученных в [16], является следующее предложение.

Предложение 1 *Пусть элементы матриц системы (1), (2) являются известными дифференцируемыми функциями параметра θ. Тогда, для данного значения параметра θ оценки вектора состояния x_k, значения их величин чувствительности $\partial\hat{x}_k/\partial\theta$, а также UD-факторы U_{P_k}, D_{P_k} матриц ковариаций ошибок оценивания и значения их величин чувствительности $\partial U_{P_k}/\partial\theta$, $\partial D_{P_k}/\partial\theta$ могут быть вычислены одновременно с помощью следующего алгоритма aUD-CF-TM.*

Алгоритм (aUD-CF-TM). Адаптивный UD-фильтр с уравнениями чувствительности.
Вход: $\bar{x}_0$, Π_0, $\theta = \theta_i$, $i = 1, \ldots, p$.

Инициализация.

1. Положить $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$, $X_0 = \Pi_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^T$, $\Pi_0 = U_{\Pi_0}D_{\Pi_0}U_{\Pi_0}^T$, $X_0 = U_{X_0}D_{X_0}U_{X_0}^T$.
   $(\hat{x}_0)'_\theta = \frac{\partial\hat{x}_0}{\partial\theta}$, $(U_{P_0})'_\theta = \frac{\partial U_{P_0}}{\partial\theta}$, $(D'_{P_0})_\theta = \frac{\partial D_{P_0}}{\partial\theta}$, $(U_{X_0})'_\theta = \frac{\partial U_{X_0}}{\partial\theta}$, $(D_{X_0})'_\theta = \frac{\partial U_{X_0}}{\partial\theta}$.

for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**

Обновление по времени.

2. $\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{x}_{k-1}$, $(\hat{x}_{k|k-1})'_\theta = \frac{\partial F_{k-1}}{\partial\theta}\hat{x}_{k-1} + F_{k-1}(\hat{x}_{k-1})'_\theta$.
3. $Q_{k-1} = U_{Q_{k-1}}D_{Q_{k-1}}U_{Q_{k-1}}^T$, $(U_{Q_{k-1}})'_\theta = \frac{\partial U_{Q_{k-1}}}{\partial\theta}$, $(D_{Q_{k-1}})'_\theta = \frac{\partial D_{Q_{k-1}}}{\partial\theta}$.
4. $\mathcal{A}_1^T = \begin{bmatrix}\widetilde{F}_{k-1}U_{X_{k-1}} & G_{k-1}U_{Q_{k-1}}\end{bmatrix}$, $(\mathcal{A}_1^T)'_\theta = \frac{\partial\mathcal{A}_1^T}{\partial\theta}$; $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix}\sigma_\xi^2 D_{X_{k-1}} & 0\\ 0 & D_{Q_{k-1}}\end{bmatrix}$, $(\mathcal{D}_{\mathcal{A}_1})'_\theta = \frac{\partial\mathcal{D}_{\mathcal{A}_1}}{\partial\theta}$.
   По лемме 2 $\langle\mathcal{A}_1^T, (\mathcal{A}_1^T)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_1}, (\mathcal{D}_{\mathcal{A}_1})'_\theta\rangle \Longrightarrow \langle\mathcal{U}_1, (\mathcal{U}_1)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{U}_1}, (\mathcal{D}_{\mathcal{U}_1})'_\theta\rangle$
   где $\mathcal{U}_1 = U_{\widetilde{Q}_{k-1}}$, $(\mathcal{U}_1)'_\theta = (U_{\widetilde{Q}_{k-1}})'_\theta$, $\mathcal{D}_{U_1} = D_{\widetilde{Q}_{k-1}}$, $(\mathcal{D}_{U_1})'_\theta = (D_{\widetilde{Q}_{k-1}})'_\theta$.
5. $\mathcal{A}_2^T = \begin{bmatrix}F_{k-1}U_{P_{k-1}} & U_{\widetilde{Q}_{k-1}}\end{bmatrix}$, $(\mathcal{A}_2^T)'_\theta = \frac{\partial\mathcal{A}_2^T}{\partial\theta}$; $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_2} = \begin{bmatrix}D_{P_{k-1}} & 0\\ 0 & D_{\widetilde{Q}_{k-1}}\end{bmatrix}$, $(\mathcal{D}_{\mathcal{A}_2})'_\theta = \frac{\partial\mathcal{D}_{\mathcal{A}_2}}{\partial\theta}$.
   По лемме 2 $\langle\mathcal{A}_2^T, (\mathcal{A}_2^T)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_2}, (\mathcal{D}_{\mathcal{A}_2})'_\theta\rangle \Longrightarrow \langle\mathcal{U}_2, (\mathcal{U}_2)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{U}_2}, (\mathcal{D}_{\mathcal{U}_2})'_\theta\rangle$
   где $\mathcal{U}_2 = U_{P_{k|k-1}}$, $(\mathcal{U}_2)'_\theta = (U_{P_{k|k-1}})'_\theta$, $\mathcal{D}_{U_2} = D_{P_{k|k-1}}$, $(\mathcal{D}_{U_2})' = (D_{P_{k|k-1}})'_\theta$.
6. $\mathcal{A}_3^T = \begin{bmatrix}F_{k-1}U_{X_{k-1}} & U_{\widetilde{Q}_{k-1}}\end{bmatrix}$, $(\mathcal{A}_3^T)'_\theta = \frac{\partial\mathcal{A}_3^T}{\partial\theta}$; $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_3} = \begin{bmatrix}D_{X_{k-1}} & 0\\ 0 & D_{\widetilde{Q}_{k-1}}\end{bmatrix}$, $(\mathcal{D}_{\mathcal{A}_3})'_\theta = \frac{\partial\mathcal{D}_{\mathcal{A}_3}}{\partial\theta}$.
   По лемме 2 $\langle\mathcal{A}_3^T, (\mathcal{A}_3^T)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_3}, (\mathcal{D}_{\mathcal{A}_3})'_\theta\rangle \Longrightarrow \langle\mathcal{U}_3, (\mathcal{U}_3)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{U}_3}, (\mathcal{D}_{\mathcal{U}_3})'_\theta\rangle$
   где $\mathcal{U}_3 = U_{X_k}$, $(\mathcal{U}_3)'_\theta = (U_{X_k})'_\theta$, $\mathcal{D}_{U_3} = D_{X_k}$, $(\mathcal{D}_{U_3})'_\theta = (D_{X_k})'_\theta$.

Обновление по измерениям.

7. $R_k = U_{R_k} D_{R_k} U_{R_k}^T$, $(U_{R_k})'_\theta = \frac{\partial U_{R_k}}{\partial \theta}$, $(D_{R_k})'_\theta = \frac{\partial D_{R_k}}{\partial \theta}$.
8. $\mathcal{A}_4^T = \begin{bmatrix} \widetilde{H}_k U_{X_k} & U_{R_k} \end{bmatrix}$, $(\mathcal{A}_4^T)'_\theta = \frac{\partial \mathcal{A}_4^T}{\partial \theta}$; $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_4} = \begin{bmatrix} \sigma_\zeta^2 D_{X_k} & 0 \\ 0 & D_{R_k} \end{bmatrix}$, $(\mathcal{D}_{\mathcal{A}_4})'_\theta = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{A}_4}}{\partial \theta}$.
   По лемме 2 $\langle \mathcal{A}_4^T, (\mathcal{A}_4^T)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_4}, (\mathcal{D}_{\mathcal{A}_4})'_\theta \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{U}_4, (\mathcal{U}_4)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{U}_4}, (\mathcal{D}_{\mathcal{U}_4})'_\theta \rangle$
   где $\mathcal{U}_4 = U_{\widetilde{R}_k}, (\mathcal{U}_4)'_\theta = (U_{\widetilde{R}_k})'_\theta$, $\mathcal{D}_{U_4} = D_{\widetilde{R}_k}$, $(\mathcal{D}_{U_4})'_\theta = (D_{\widetilde{R}_k})'_\theta$.
9. $\mathcal{A}_5^T = \begin{bmatrix} U_{P_{k|k-1}} & 0 \\ H_k U_{P_{k|k-1}} & U_{\widetilde{R}_k} \end{bmatrix}$, $(\mathcal{A}_5^T)'_\theta = \frac{\partial \mathcal{A}_5^T}{\partial \theta}$; $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_5} = \begin{bmatrix} D_{P_{k|k-1}} & 0 \\ 0 & D_{\widetilde{R}_k} \end{bmatrix}$, $(\mathcal{D}_{\mathcal{A}_5})'_\theta = \frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{A}_5}}{\partial \theta}$.
   По лемме 2 $\langle \mathcal{A}_5^T, (\mathcal{A}_5^T)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{A}_5}, (\mathcal{D}_{\mathcal{A}_5})'_\theta \rangle \Longrightarrow \langle \mathcal{U}_5, (\mathcal{U}_5)'_\theta, \mathcal{D}_{\mathcal{U}_5}, (\mathcal{D}_{\mathcal{U}_5})'_\theta \rangle$
   где $\mathcal{U}_5 = \begin{bmatrix} U_{P_k} & (K_k U_{\Sigma_k}) \\ 0 & U_{\Sigma_k} \end{bmatrix}$, $(\mathcal{U}_5)'_\theta = \begin{bmatrix} (U_{P_k})' & (K_k U_{\Sigma_k})'_\theta \\ 0 & (U_{\Sigma_k})'_\theta \end{bmatrix}$,
   $\mathcal{D}_{U_5} = \begin{bmatrix} D_{P_k} & 0 \\ 0 & D_{\Sigma_k} \end{bmatrix}$, $(\mathcal{D}_{U_5})'_\theta = \begin{bmatrix} (D_{P_k})'_\theta & 0 \\ 0 & (D_{\Sigma_k})'_\theta \end{bmatrix}$.
10. $\bar{e}_k = U_{\Sigma_k}^{-1}(z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1})$, $(\bar{e}_k)'_\theta = (U_{\Sigma_k}^{-1})'_\theta (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) - U_{\Sigma_k}^{-1} \left(\frac{\partial H_k}{\partial \theta} \hat{x}_{k|k-1} + H_k (\hat{x}_{k|k-1})'_\theta \right)$.
11. $\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + (K_k U_{\Sigma_k}) \bar{e}_k$, $(\hat{x}_k)'_\theta = (\hat{x}_{k|k-1})'_\theta + (K_k U_{\Sigma_k})'_\theta \bar{e}_k + (K_k U_{\Sigma_k})(\bar{e}_k)'_\theta$.

Выход: $\hat{x}_k$, $\partial \hat{x}_k / \partial \theta$, U_{P_k}, $\partial U_{P_k} / \partial \theta$, D_{P_k}, $\partial D_{P_k} / \partial \theta$, $k = 1, 2, \ldots, M$.

Для применения градиентных методов минимизации критерия идентификации (68) необходимо вычисление значений его градиента $\nabla_\theta \mathcal{J}_{UD}(\theta; Z_1^M)$.

Запишем уравнение для вычисления градиента критерия идентификации (56) в терминах UD-фильтра. Пусть $\theta \in \mathbb{R}^p$, тогда из (68) имеем

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{UD}(\theta; Z_1^M)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \left\{ \frac{\partial \left[\ln \left(\det D_{\Sigma_k(\theta)} \right) \right]}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \left[\bar{e}_k^T(\theta) D_{\Sigma_k(\theta)}^{-1} \bar{e}_k(\theta) \right]}{\partial \theta_i} \right\}, \; i = 1, \ldots, p. \tag{70}$$

Применяя правила матричного дифференцирования перепишем (70) для вычисления $\nabla_\theta \mathcal{J}_{UD}(\theta; Z_1^M)$ $(i = 1, \ldots, p)$:

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{UD}(\theta; Z_1^M)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \left\{ \operatorname{tr} \frac{\partial D_{\Sigma_k(\theta)}}{\partial \theta_i} D_{\Sigma_k(\theta)}^{-1} + 2 \frac{\partial \bar{e}_k^T(\theta)}{\partial \theta_i} D_{\Sigma_k(\theta)}^{-1} \bar{e}_k(\theta) - \bar{e}_k^T(\theta) D_{\Sigma_k(\theta)}^{-2} \frac{\partial D_{\Sigma_k(\theta)}}{\partial \theta_i} \bar{e}_k(\theta) \right\}. \tag{71}$$

Предложение 2 *Пусть элементы матриц системы (1), (2) являются известными дифференцируемыми функциями параметра $\theta \in \mathbb{R}^p$. Тогда для данного значения параметра θ значения критерия идентификации $\mathcal{J}_{UD}(\theta; Z_1^M)$ и его градиента $\nabla_\theta \mathcal{J}_{UD}(\theta; Z_1^M)$ могут быть вычислены по формулам (68) и (71) с использованием алгоритма aUD-CF-TM.*

2.2.4 Программная реализация алгоритмов

В ходе реализации второго этапа проекта в библиотеку алгоритмов дискретной фильтрации для дискретных линейных стохастических систем с аддитивными и мультипликативными шумами, разработанную на первом этапе, были добавлены алгоритмы для решения задач параметрической идентификации. На данный момент помимо алгоритмов дискретной фильтрации в библиотеке реализованы:

1. Критерий идентификации на основе отрицательной логарифмической функции правдоподобия.
2. SVD-версия критерия идентификации.
3. UD-версия критерия идентификации.
4. UD-версия критерия идентификации с вычислением градиента.
5. Функции для минимизации критериев идентификации.
6. Вспомогательные функции и скрипты.

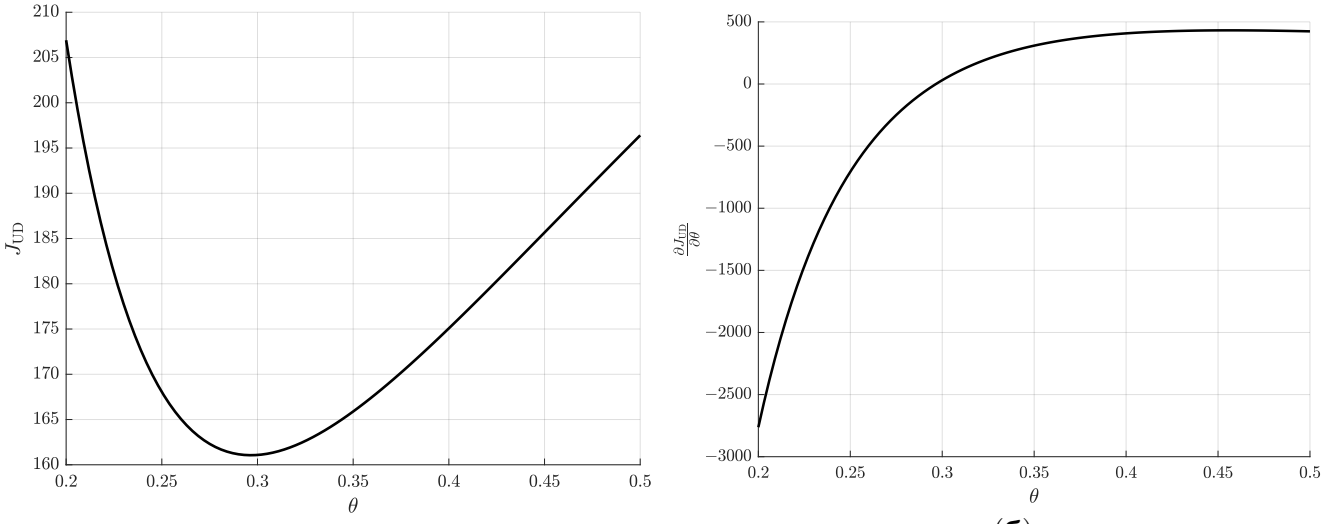
2.2.5 Численный пример

Рассмотрим модель почти равномерного прямолинейного движения по прямой с мультипликативными шумами в уравнении объекта и измерений:

$$\begin{cases} x_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_{k-1} \right) x_{k-1} + \begin{bmatrix} \theta^2/2 \\ \theta \end{bmatrix} w_{k-1}, \\ z_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta_k \right) x_k + v_k, \quad k = 1, \ldots, 100, \end{cases} \tag{72}$$

где $x_k = [x_1, x_2]_k^T$, $x_1 = x$ — координата объекта, $x_2 = v_x$ — скорость объекта, $x_0 \sim \mathcal{N}([0,1]^T, 10I_2)$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$, $v_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_2)$ $(\sigma = 0.1, 0.5, 1.0)$, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 10^{-4})$, $\zeta_k \sim \mathcal{N}(0, 10^{-4})$, θ — параметр модели, подлежащийй идентификации. Пусть “истинное” значение параметра равно $\theta^* = 0.3$.

Для проведения вычислительных экспериментов в MATLAB были реализованы функции для моделирования динамики системы и измерений, а также функции для вычисления критерия идентификации (68) и его градиента (71). На рис. 3 показаны критерий идентификации и его градиент для рассматриваемой задачи с ковариационной матрицей шума $R = 0.5^2 I_2$, усредненные по результатам 100 экспериментов.



(**а**) (**б**)

Рис. 3: Критерий идентификации (**а**) и его градиент (**б**)

Для численной минимизации критерия идентификации использовались следующие функции (оптимизаторы) MATLAB: `simulannealbnd`, `ga` и `fmincon`. В первых двух функциях реализованы безградиентные метаэвристические алгоритмы SA (Simulated Annealing — метод имитации отжига) и GA (Genetic Algorithm — генетический алгоритм), соответственно. В третьей функции использовалась два градиентных алгоритма: `interior-point` (IP) и `trust-region-reflective` (TRR). В первом алгоритме выполняется оценка градиента при помощи конечных разностей, а во втором используется функция вычисления градиента, заданная пользователем.

Была проведена серия из 100 вычслительных экспериментов для каждого значения уровня шума σ. В каждом эксперименте численная идентификация параметра θ выполнялась по результатам смоделированных измерений. Поиск решение θ^* выполнялся на отрезке $[0.1; 1]$. Начальное приближение для SA и обоих градиентных алгоритмов выбиралось случайно в каждом эксперименте.

В табл. 3 приведены настройки оптимизаторов. Все остальные параметры выбирались по умолчанию. Эксперименты проводились на следующей программно-аппаратной платформе: Windows 11, Intel Core i3-1115G4 CPU @ 3.00 GHz, 8 GB of RAM.

Таблица 3: Настройки оптимизаторов

Оптимизатор	**Настройки**
SA	'TimeLimit' = Inf, 'MaxFunEvals' = Inf, 'MaxIter' = Inf, 'StallIterLimit' = 100, 'ReannealInterval' = 100, 'Display' = 'off'
GA	'TimeLimit' = Inf, 'Generations' = Inf, 'StallGenLimit' = 20, 'PopulationSize' = 10, 'PopInitRange' = [0.1; 1], 'MutationFcn' = @mutationadaptfeasible, 'Display' = 'off'
FMINCON (IP)	'SpecifyObjectiveGradient' = false, 'Algorithm' = 'interior-point', 'MaxFunctionEvaluations' = Inf, 'Display' = 'off'
FMINCON (TRR)	'SpecifyObjectiveGradient' = true, 'Algorithm' = 'trust-region-reflective' 'MaxFunctionEvaluations' = Inf, 'Display' = 'off'

В табл. 4 приведены среднее число итераций и время выполнения для всеъ оптимизаторов. Видно, что при выбранных настройках градиентные алгоритмы работают значительно быстрее, чем безградиентные. При этом, алгоритм TRR примерно на 10 процентов быстрее и требует меньшее число итераций, чем алгоритм IP, а алгоритм SA работает в среднем в два раза быстрее, чем GA.

Таблица 4: Среднее число итераций и время, с

		SA	**GA**	**FMINCON (IP)**	**FMINCON (TRR)**
$\sigma = 1.0$	Итерации	187	33	13	7
	Время	2.857	5.044	0.661	0.499
$\sigma = 0.5$	Итерации	176	36	12	7
	Время	2.739	5.582	0.568	0.509
$\sigma = 0.1$	Итерации	187	42	12	7
	Время	2.880	6.506	0.607	0.540

Результаты идентификации параметра θ приведены в табл. 5. Из таблицы видно, что средняя точность идентификации параметра примерно одинакова для всех алгоритмов. Ошибки RMSE и MAPE уменьшаются при уменьшении уровня шума, при этом для алгоритма SA они остаются несколько выше, чем для остальных алгоритмов.

Заключение, результаты выполнения проекта

В результат выполнения проекта были получены следующие основные результаты:

1. Разработаны и теоретически обоснованы новые алгоритмы информационной фильтрации для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.
2. Разработаны и теоретически обоснованы новые блочно-ортогонализованные квадратно-корневые алгоритмы дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме) на базе матричного QR-преобразования для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами.

Таблица 5: Результаты идентификации

		SA	**GA**	**FMINCON (IP)**	**FMINCON (TRR)**
	Среднее	0.287424	0.287823	0.287803	0.287802
$\sigma = 1.0$	RMSE	0.029494	0.028942	0.028962	0.028962
	MAPE	7.967221	7.818963	7.827929	7.827960
	Среднее	0.299297	0.299802	0.299805	0.299805
$\sigma = 0.5$	RMSE	0.016056	0.015995	0.015996	0.015996
	MAPE	4.217731	4.183624	4.183879	4.183878
	Среднее	0.298175	0.299436	0.299438	0.299438
$\sigma = 0.1$	RMSE	0.005688	0.003432	0.003429	0.003429
	MAPE	1.419462	0.881047	0.880159	0.880159

3. Разработаны и теоретически обоснованы новые блочно-ортогонализованные алгоритмы дискретной фильтрации (в ковариационной и информационной форме) на базе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта (MWGS-преобразование) для класса дискретных стохастических систем с мультипликативными и и аддитивными шумами.
4. Разработаны новые алгоритмы параметрической идентификации для систем с аддитивными и мультипликативными шумами на основе численных методов оптимизации безградиентного типа, в которых значения критерия идентификации вычисляются с помощью блочно-ортогонализованных алгоритмов дискретной фильтрации.
5. Разработаны новые алгоритмы параметрической идентификации для систем с аддитивными и мультипликативными шумами на основе численных методов оптимизации градиентного типа, в которых значения критерия идентификации и его градиента вычисляются с помощью блочно-ортогонализованных алгоритмов адаптивной дискретной фильтрации с возможностью вычисления величин чувствительности оценок вектора состояния по параметрам неопределенности.
6. Выполнена программная реализация разработанных алгоритмов на языке MATLAB.

Все полученные результаты были опробированы на научных мероприятиях международного уровня (см. приложение А) в форме устных докладов, опубликованы в трудах конференций и рецензируемых российских и зарубежных журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus и RSCI со ссылкой на поддержку Российского Научного Фонда.

Таким образом, все поставленные задачи в ходе реализации проекта были выполнены в полном объеме в соответствии с планом научных исследований.

Список литературы

[1] Tsyganov, A. V. UD-based linear filtering for discrete-time systems with multiplicative and additive noises / A. V. Tsyganov, J. V. Tsyganova, T. N. Kureneva // Proceedings of the European Control Conference (ECC20), May 12–15, 2020. Saint Petersburg, Russia. — 2020 — P. 1389–1394.

[2] Henderson, H. V. On deriving the inverse of a sum of matrices / H. V. Henderson, S. R. Searle // SIAM Review. — 1981. — Vol. 23, no. 1. — P. 53–60.

[3] Tsyganov, A. V. Extended square-root covariance filtering algorithm for discrete-time systems with multiplicative and additive noises / A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, T. N. Kureneva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 6. — P. 1438–1445. — DOI: 10.1134/S199508022209027X

[4] Björck, A. Solving least squares problems by orthogonalization / A. Björck // BIT. — 1967. — Vol. 7. — P. 1—21.

[5] Thornton, C. L. Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering / C. L. Thornton // Ph. D. thesis. School of Engineering. University of California at Los Angeles. — 1976.

[6] Bierman, G. J. Factorization Methods For Discrete Sequential Estimation / G. J. Bierman // New York: Academic Press. — 1977. — 256 p.

[7] Tsyganova, J. V.A general approach for designing the MWGS-based information-form Kalman filtering methods / J. V. Tsyganova, M. V. Kulikova, A. V. Tsyganov // European Journal of Control. — 2020. — Vol. 56. — P. 86–97.

[8] Алгоритмы дискретной фильтрации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама-Шмидта для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. Н. Кувшинова, А. В. Голубков // Вычислительные технологии. (принята к печати) Алгоритмы дискретной фильтрации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама – Шмидта для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. Н. Кувшинова, А. В. Голубков // Вычислительные технологии. — 2023. — Т. 28, № 5. — С. 70–86. — DOI: 10.25743/ICT.2023.28.5.007

[9] Новые алгоритмы дискретной фильтрации на основе MWGS-ортогонализации для систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. Н. Кувшинова, Т. Н. Куренева // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2022): сборник трудов по материалам VIII Международной конференции и молодежной школы (г. Самара, 23–27 мая). — Т. 5. Науки о данных. — Самара : Издательство Самарского университета, 2022. — С. 051332.

[10] Bar-Shalom, Y. Estimation with Applications to Tracking and Navigation / Y. Bar-Shalom, T. Kirubarajan, X-R. Li // John Wiley & Sons, Inc. — 2001. — 584 p.

[11] Gibbs, B.P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling: a practical handbook / B.P. Gibbs, // John Wiley & Sons, Inc.: Hoboken, New Jersey, USA. — 2011.

[12] Åström, K.-J. Maximum Likelihood and Prediction Error Methods. / K.-J. Åström // Automatica. — 1980. — Vol. 16. — P. 551–574.

[13] Цыганов, А. В. Идентификация параметров моделей дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова, А. В. Голубков // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2023): сборник трудов по материалам IX Международной конференции и молодежной школы (г. Самара, 17–23 апреля 2023 г.). — Т. 5. Науки о данных. — Самара : Издательство Самарского университета, 2023. — С. 050682.

[14] Кувшинова, А. Н. О вычислении производных в алгоритме параметрической идентификации градиентного типа для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами / А. Н. Кувшинова, А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова // Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии: материалы IX Международной научно-практической конференции, Елец, 24–25 апреля 2023 года. — Елец : Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2023. — С. 79–84.

[15] Tsyganov, A. SVD-based identification of parameters of the discrete-time stochastic systems models with multiplicative and additive noises using metaheuristic optimization / A. Tsyganov, Y. Tsyganova // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 20. — URL: https://www.mdpi.com/2227-7390/11/20/4292. — DOI: 10.3390/math11204292

[16] Tsyganov, A. Parameter Identification of the Discrete-Time Stochastic Systems with Multiplicative and Additive Noises Using the UD-based State Sensitivity Evaluation / A. Tsyganov, Y. Tsyganova // Mathematics. — 2023. (на рецензировании)

[17] Björck, A. Numerical methods in matrix computations / A. Björck. — Springer International Publishing. — 2015. — 800 p.

[18] Gupta, N. K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations / N. K. Gupta, R. K. Mehra // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1974. — AC-19. — P. 774–783.

[19] Tsyganova, J. V. State sensitivity evaluation within UD based array covariance filters / J. V. Tsyganova, M. V. Kulikova // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2013. — Vol. 58, no. 11. — P. 2944–2950.

A Сертификаты конференций

VIII INTERNATIONAL CONFERENCE ON
INFORMATION TECHNOLOGY AND NANOTECHNOLOGY
(ITNT - 2022)

Best Paper Award (III place)

awarded to

Anastasia Kuvshinova

for the paper presentation at oral session

New discrete-time filtering algorithms based on the MWGS-orthogonalization for systems with multiplicative and additive noises

presented at the VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT - 2022)

Samara National Research University

Image Processing Systems Institute—Branch of the Federal Scientific Research Centre
"Crystallography and Photonics" of the Russian Academy of Sciences

Program Committee Chair,
President of Samara University,
Academician of the RAS

V.A. Soifer

23-27 May 2022
Samara, Russia

Рис. 4: Сертификат Best Paper Award (ИТНТ-2022)

IX INTERNATIONAL CONFERENCE ON
INFORMATION TECHNOLOGY AND NANOTECHNOLOGY
(ITNT - 2023)

CERTIFICATE

awarded to

Aleksey Golubkov

for attending the IX International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT - 2023)

Samara National Research University

Image Processing Systems Institute—Branch of the Federal Scientific Research Centre
"Crystallography and Photonics" of the Russian Academy of Sciences

Program Committee Chair,
President of Samara University,
Academician of the RAS

V.A. Soifer

17-21 April 2023
Samara, Russia

Рис. 5: Сертификат ИТНТ-2023

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова
Российский университет транспорта

СЕРТИФИКАТ

Кувшинова Анастасия Николаевна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
Ульяновского государственного педагогического университета им. И.Н. Ульянова (г. Ульяновск).,
приняла участие в IX Международной научно-практической конференции
«Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация,
интеллектуальные технологии» (CSMSSIT-2023), Елец, 24-25 апреля 2023 г.
с докладом на тему:
«О вычислении производных в алгоритме параметрической идентификации градиентного типа для дискретных стохастических систем с мультипликативными и аддитивными шумами».

И.о. ректора ЕГУ им. И.А. Бунина
С.В. Щербатых

Рис. 6: Сертификат CSMSSIT-2023